GEOMETRIE
Géométrie dans l'espace

Dans tous les exercices, 1'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

EXERCICE N°1 : 5' 1 points

On donne le point $A(2,1,3)$ et le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire en A à P $(A,\vec{u},\vec{v})$.

EXERCICE N°2 : 15' 3 points

Soit la droite $D:\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+2t \\ z = -1-t \end{cases}$; $t \in IR$ et $A(0,3,-2)$.

1°) Déterminer la distance de A à la droite D.
2°) Déterminer la distance de A à un point M de la droite D.
3°) Pour quelle valeur de t cette distance est-elle minimale ?
4°) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur D.

EXERCICE N°3 : 15' 3 points

Pour tout réel m, on considère le plan P_m d'équation : $(1+m)x + y - 2mz - 3m - 4 = 0$.

Soit le point $A(0,3,-2)$.

1°) a) Déterminer la distance de A à P_m.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la distance de A à est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2°) Soit la droite $D:\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+2t \\ z = -1-t \end{cases}$; $t \in IR$

Montrer que pour tout m, la droite D est incluse dans P_m.

EXERCICE N°4 : 15' 3 points

On considère le points $A(1,-1,2)$.

1°) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

2°) Soit la droite Δ d'équation cartésiennes : $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

a) Donner une équation paramétrique de Δ.
b) Montrer que les droites D et Δ ne sont pas coplanaires.

3°) Soit P le plan passant par O et perpendiculaire à D .

a) Ecrire une équation cartésienne du plan P.
b) Montrer que la droite Δ est contenue dans le plan P.

EXERCICE N°5 : 20' 4 points

On donne les points $A(2,1,-1)$; $B(-1,1,-1)$; $C(1,2,0)$ et $E(4,-3,2)$.

1°) a) Calculer le composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

c) Calculer l'aire du triangle *ABC*.

2°) Soit *P* le plan d'équation : $2x + y - 5z - 4 = 0$ et Δ la droite d'équation cartésienne :

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = z - 1.$$

a) Déterminer l'intersection de *P* et Δ.

b) Vérifier que la droite (*BC*) est incluse dans *P* et que Δ passe par le point $E(4,-3,2)$.

3°) a) Soit le point $D(-2,3,-1)$. Montrer que les points *A*, *B*, *C* et *D* ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre *ABCD*.

4°) Déterminer l'ensemble des points *M* de ξ tel que : $\left(\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

EXERCICE N°6 : 15' 3 points

On donne les quatre points *A*, *B*, *C* et *I* de coordonnées respectives :
$A(-1,2,1)$; $B(1,-6,-1)$; $C(2,2,2)$ C(2, 2 , 2) et $I(0,1,-1)$.

1°) a) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) contenant les trois points *A*, *B* et *C*.

2°) Soit Q le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$ et (*Q*') le plan du repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

a) Pourquoi les plans (*Q*) et (*Q*') sont – t – il sécantes ?

b) Donner un point *E* et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (*D*) des plans (*Q*) et (*Q*').

EXERCICE N°7 : 20' 5 points

ABCDEFGH un cube d'arêtes 1.

On désigne par *I*, *J* et *K* sont les milieux respectifs des arêtes [*BC*], [*AE*] et [*DC*].

On munit alors l'espace du repère orthonormée direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ orienté par celui-ci.

1°) a) Vérifier que *I* a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et que *K* a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GK}$.

c) Calculer alors le volume de tétraèdre *JGKI*.

2°) a) Montrer que le plan (*GIK*) à pour équation : $2x + 2y - z - 3 = 0$.

b) Montrer que $(CJ): \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$

3°) La droite (*CJ*) coupe le plan (*GIK*) en *H*'.

a) Vérifier que la droite (*CJ*) est perpendiculaire au plan (*GIK*).

b) Déterminer les deux points de (*CJ*) dont la distance au plan (*GIK*) est égale à 1.

4°) Montrer qu'il existe deux sphères de rayon 1 tangentes au plan (*GIK*) en *H*'.